Gränsvärden.

Kapitlets syfte

Intervallinkapslingssatsen behöver stramas upp. Den nya versionen är en hörnsten i kommande idépresentationer. Samma gäller för gränsvärden.

Gränsvärdesdefinitionen rättar jag till med hjälp av intervallinkapslingssatsen. Jag utesluter vissa resultat (som jag kallar slutvärden) från att vara gränsvärden.

Intervall

Ett intervall är ett sammanhängande avsnitt på den reella tallinjen.

Jag skriver i alla kapitel intervall så här: [a__b] , (a__b), (a__b], [a__b).

Hakparentes betyder, att ändvärdet ingår (annars inte). Den korta linjen mellan ändvärdena a och b representerar intervallets innehåll exklusive a och b.

När det inte finns något innehåll mellan ändpunkterna, blir beteckningarna [a], (a), (a] och [a). Varken linjen eller b behövs, eftersom a och b nu har samma värde.

- Intervallet [a] är slutet och innehåller ett enda tal, a, som är samma som intervallets båda gränser.
- Intervallet (a) är öppet och saknar både innehåll och ändvärden.
- Intervallen (a] och [a) är halvöppna. Här ingår det slutna ändvärdet a men inte det öppna ändvärdet a. Frågan är då: Ingår a eller ej? För det kan väl inte göra båda delarna samtidigt?

Det slutna intervallet [a] kallar jag *nollintervallet* (0 värden mellan ändpunkterna). Enligt *Bourbaki: Elements of Mathematics* ska de övriga varianterna definieras som tomma, så (a), (a] och [a) benämns alla tre *det tomma intervallet*.

✓ *Varje reellt intervall med olika ändpunkter innehåller **oändligt** många olika talvärden.*
✓ *Nollintervallet innehåller endast **ett** värde, det sammanfallande ändvärdet.*
✓ *Det tomma intervallet innehåller **inget** värde alls.*

Intervallinkapslingssatsen

Det här avsnittet är centralt och nödvändigt för förståelsen av gränsvärden och följdeffekter av desamma, typ irrationella tal och oändliga tal/mängder.

Jag definierar längre ner gränsvärden med hjälp av *intervallinkapslingssatsen*.

Intervallinkapslingssatsen kan populärt beskrivas så här. Jag har en följd av slutna intervall av reella tal. Om inget efterföljande intervall sticker utanför föregående intervall, så har jag en intervallinkapsling. Kräver jag dessutom, att de allt kortare intervallens längder ska sjunka ner mot 0, när antalet intervall går mot oändligheten, formuleras intervallinkapslingssatsen på vardagsspråk vanligen:

> *Det finns bara ett enda tal A som tillhör (= ligger inbakat i) alla intervallen som inkapslar varandra.*

Satsen tolkas som, att man till slut når ett nollintervall, det enda som innehåller bara ett tal A, nämligen intervallet [A].

Intervallinkapslingssatsen möter alla som studerar matematik på lite mer avancerad nivå. Och alla tror uppenbarligen, att den är sann, för ingen verkar ha protesterat mot den. Så här börjar en lärare på en av våra högre läroanstalter sitt skriftliga bevis av satsen:

> *”Bevis: Att det inte kan finnas mer än ett tal som tillhör alla intervallen är praktiskt taget självklart. …”*

Hoppsan, där gick han rakt in i fällan! Det läraren uppfattar som ”praktiskt taget självklart” är oftare fel än rätt!

Misstaget beror på, att intervallinkapslingssatsen formuleras på ett något svävande sätt, så att den är sann ibland men osann för det mesta. Satsen är sann för alla ändliga följder av intervall samt ändliga följder, där man (konstlat) lägger till det sista intervallet [A] oändligt många gånger. För alla icke-konstlade oändliga följder är slutsatsen inte sann.

Jag skärper nu intervallinkapslingssatsen genom att kräva:

> ***För varje delintervall skall det finnas ett ännu kortare intervall längre bort i inkapslingsföljden.***

Detta hindrar det suspekta nollintervallet från att ingå i följden. Eftersom det saknar utbredning, finns det inte något kortare än det.

Skärpningen ger också, att det med nödvändighet finns *oändligt* många olika långa, inkapslade intervall.

Mitt krav är viktigt, för det sorterar bort följder som redan efter ett ändligt antal steg når ett *slutvärde* = nollintervallet.

Här är en följdeffekt av min skärpning av intervallinkapslingssatsen:

> *Det finns alltid **oändligt** många tal, som tillhör alla intervallen. Ett enda av alla dessa tal, A, har dock den unika egenskapen att **garanterat** tillhöra alla intervallen.*

Låt mig för ett ögonblick vända på resonemanget och låtsas, att det på klassiskt vis bara finns ett enda gemensamt värde A. Jag kallar ett annat, näraliggande värde för B. Oberoende av hur nära intill varandra A och B ligger, så kommer B att underkännas som ett gemensamt tal, för någonstans längre bort i intervallkedjan nås intervall som är så korta, att till och med B hamnar utanför.

Varje *utpekat* talvärde skilt från A kan inte vara ett för alla intervallen gemensamt tal. Men, i det ynkliga intervall som sopade bort B ligger fortfarande oändligt många tal. Detta gäller för alla tänkbara värden på B. Även om vi rensar ut oändligt många värden, återstår det ändå alltid oändligt många till.

Det speciella talvärdet A i satsen har flera unika egenskaper, varav en är, att garanterat tillhöra alla intervallen. Talet är alltså ett bland oändligt många. Andra unika egenskaper hos A presenteras senare i texten.

Gränsvärde

Gränsvärden är centrala för vår förståelse av världen. Min syn på hur viktiga gränsvärden är får ett visst stöd av ett uttalande av Bertrand Russel, en av nittonhundratalets stora tänkare och matematiker/logiker samt nobelpristagare i litteratur. Han sa ungefär så här:

Trots att det verkar som en paradox, domineras all exakt vetenskap av idén om approximationer.

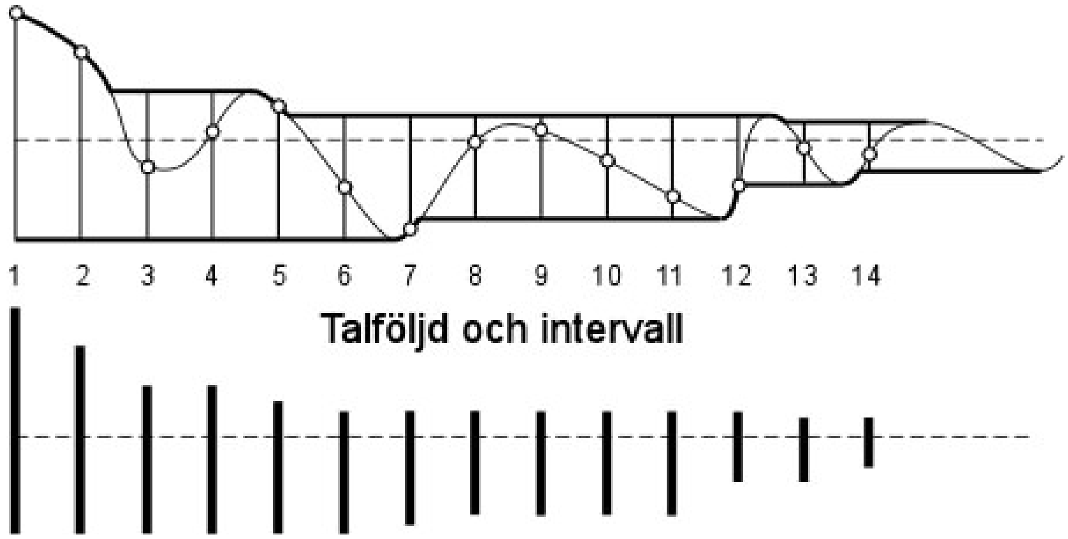
Approximationer är närmevärden, det vill säga värden som ligger nöjaktigt nära ett exakt, teoretiskt värde. Skillnaden mellan närmevärdet och det exakta värdet bör vara så liten, att man kan bortse från den. I den numeriska analysen kan denna skillnad vara ganska stor, den praktiska tillämpningen styr. När det gäller gränsvärden, driver man skillnaden till att bli oändligt liten, alltså extremfallet.

Den klassiska definitionen:

> *Funktionen f sägs ha gränsvärdet A, när* $x \to +\infty$*, om det till varje tal* $\varepsilon > 0$ *finns ett tal* ω*, sådant att* $| f(x) - A | < \varepsilon$ *för alla x sådana att* $x > \omega$.

Den här definitionen tillåter, att f(x) = ett konstant värde A bortom ett visst x-värde (ω). A är då ett *slutvärde*. Ett sådant kännetecknas av, att det uppnås, i en funktion vid ett givet x-värde och i en talföljd efter ett ändligt antal steg.

Följande bild visar, hur jag stänger in en funktion/talföljd i en följd av slutna intervall



Om intervallföljden uppfyller mina krav i intervallinkapslingssatsen, ger den följande definition av gränsvärde:

> *Funktionen f sägs ha gränsvärdet A, när* $x \to +\infty$*, om det till varje tal ε > 0 finns ett tal ω, sådant att* **0** *< | f(x) - A | < ε för alla x sådana att x > ω.*

Min definition utesluter *| f(x) - A | = 0,* som motsvarar det icke tillåtna nollintervallet. A är antingen ett *slutvärde* eller ett *gränsvärde* aldrig båda.

Utan att här ge ett teoretiskt bevis, redovisar jag den viktiga slutsatsen:

Gränsvärdet saknar de egenskaper som styr konvergensen.

Det kommer snart exempel på detta.

Låt oss nu se på specialfallet monotona kurvor. De är monotont växande, om de aldrig avtar samt monotont avtagande, om de aldrig stiger.

När det gäller monotona kurvor, har vi ännu en viktig poäng att skörda, nämligen att en konvergerande, monoton kurva aldrig kan innehålla sitt gränsvärde. En pendlande kurva kan däremot skära gränsvärdet (den prickade linjen i bilden ovan).

Kommentar:

> Det ouppnåeliga gränsvärdet A är exakt detsamma som det uteslutna nollintervallet [A].
> Att en monoton kurva aldrig kan nå ett gränsvärde, styrs av min definition av gränsvärden. Om den inte når ett gränsvärde kan det bero på, att den stannar i ett slutvärde.

I resten av kapitlet behöver jag bara monotont konvergenta kurvor / talföljder.

En försvunnen egenskap

Nu kommer en betydelsefull detalj – den försvunna egenskapen.

När det gäller funktioner, så har till exempel $y = 1/x$, x > 1, självklara egenskaper, som gränsvärdet saknar. Kurvan är ständigt avtagande och krökt. Gränsvärdet är å andra sidan en rät, horisontell linje (y = 0, det vill säga x-axeln). Kurvan har framträdande egenskaper (avtagande, krökt), som dess gränsvärde saknar.

För en talföljd (i stället för x ovan väljer jag n, ett naturligt tal) kan det bli så här:

Bortom ett visst värde på n (för n > 1 i vårt exempel) är 1/n alltid en kvot, som inte kan reduceras till ett heltal. Gränsvärdet 0 är däremot ett heltal. Vi har en viktig egenskap som biter sig fast i talföljden och gränsvärdesprocessen, men som på ett mystiskt sätt förändras/försvinner i gränsvärdet.

Kommentar:

> I fallet $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})$ blir resultatet 1/2, vilket tyder på, att nämnda egenskap finns kvar, men så är det inte, för termen 1/2 deltar inte aktivt i gränsförloppet. Den kan brytas ut ur limesuttrycket.
> $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})$ = $\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})$. Delen $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})$ är *det egentliga gränsvärdet.*
>
> Det är hos det egentliga gränsvärdet som egenskapsförändringen gäller.

Vid ett oändligt förlopp är ”den försvunna egenskapen” ett kännetecken på, att gränsvärdet är hittat. Om gränsvärdet för 1/n ovan hade varit ett bråk 1/nn (alltså vid bevarad egenskap), hade det också varit möjligt att hitta ett ännu mindre tal genom att addera 1 till nämnaren, 1/(nn+1), och då var 1/nn uppenbarligen inte det sökta gränsvärdet. Därför kan gränsvärdet just i detta fall inte vara av typen bråk (med nämnaren större än täljaren).

Vilken den tappade egenskapen är, varierar från gränsvärde till gränsvärde. Ibland är den svår att identifiera. Givetvis kan det finnas fler än en egenskap som försvinner eller förändras.

För monotona, konvergenta, oändliga talföljder gäller:

- *Gränsvärdet saknar den eller de egenskaper, som varje element tillräckligt långt in i följden har och som samtidigt utnyttjas i konvergensförloppet.*
- *Gränsvärdet kan aldrig uppnås.*

Kvastar

Jag väljer två monotont avtagande talföljder T och F samt ett fixerat värde G. F är den talföljd som ska undersökas.

$$T = \frac{1}{n}, \qquad F = \frac{1}{n^2} \qquad \text{och} \qquad G = 0\,.$$

För alla n > 1 är T större än F som i sin tur är större än G. Både T och F sjunker monotont ner mot värdet G = 0, när n växer över alla gränser. F är instängd mellan T och G. Eftersom T sjunker ner mot G, fungerar de som övre och undre gräns till F, vars gränsvärde bestäms till klämvärdet 0.

Som du ser, är T = n x F. T är med andra ord n gånger större än F. När n går mot oändligheten sjunker både T och F mot G = 0, men om vi jämför T och F med varandra, så växer T till att bli oändligt mycket större än F. Ur F:s synpunkt kommer T att försvinna upp i skyn och ge F ett i sitt tycke allt större utrymme. Det rimmar illa med att F kläms ihop mellan T och G. T kommer aldrig att nå ner till G för att på så sätt nagla fast det slutliga gränsvärdet för F.

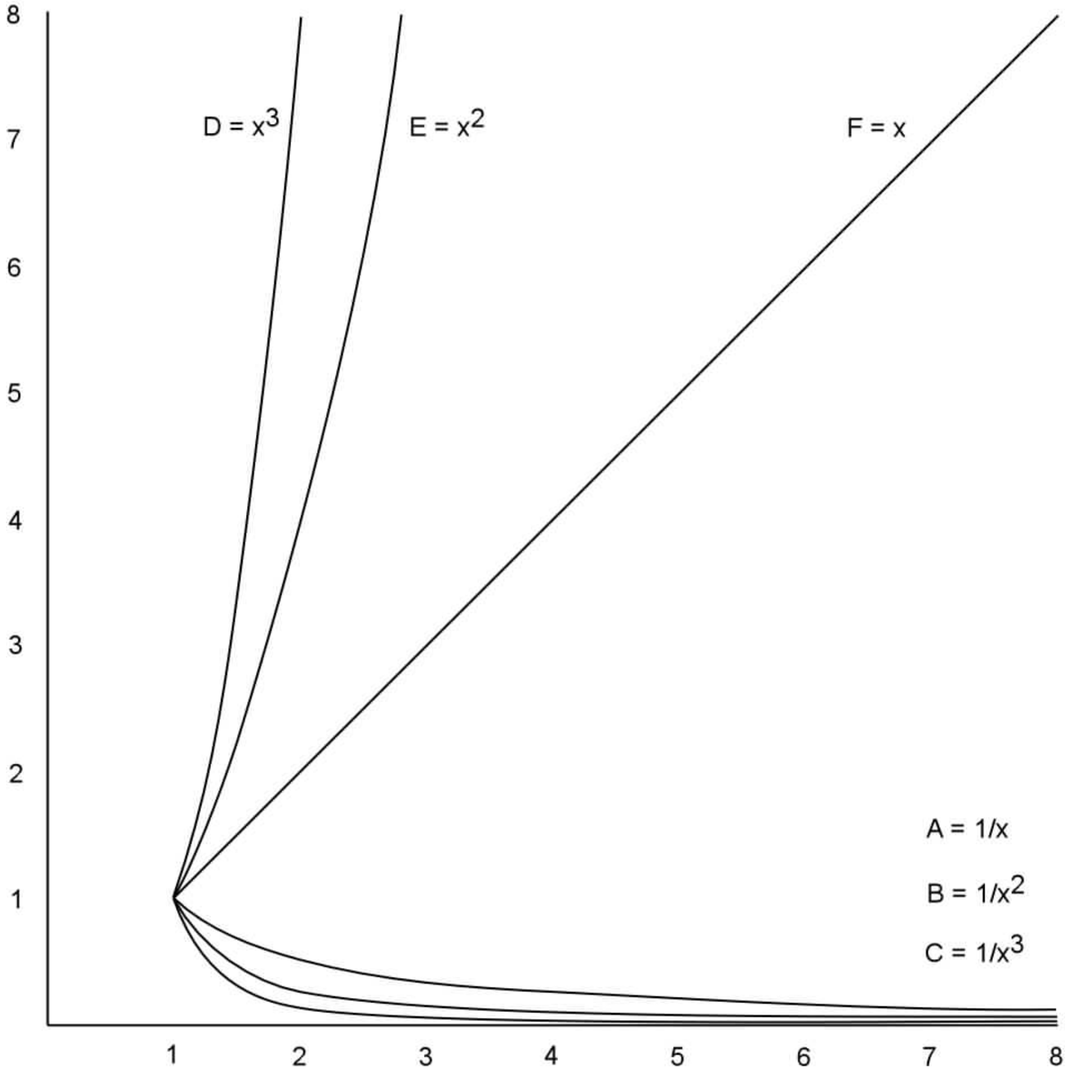
Låt mig nu välja ett helt knippe av talföljder:

$$F_1 = \frac{1}{n}, \quad F_2 = \frac{1}{n^2}, \quad F_3 = \frac{1}{n^3}, \quad F_4 = \frac{1}{n^4}, \quad \ldots, \quad F_p = \frac{1}{n^p} \text{ och G = 0.}$$

Mellan dessa råder inbördes samma relativa fenomen som ovan. F_1 tenderar att bli oändligt mycket större än F_2 som tenderar att bli oändligt mycket större än F_3 som tenderar att bli oändligt mycket större än F_4 som ... Allt relativt sett. Samtidigt sjunker allihop mot 0. Hur ska alla dessa kunna stråla samman i ett slutligt, gemensamt gränsvärde, när de gör allt för att, relativt sett, komma bort från varandra?

Trots vad som nu sagts, räknar man allmänt med gränsvärdet (exakt!) 0 som ett sant slutvärde för alla de godtyckligt många talföljderna ovan.

Nu vänder jag på resonemanget och studerar D = x^3, E = x^2 och F = x. Där är de flesta rörande eniga om, att det är en enorm skillnad mellan, hur brant respektive kurva rusar upp mot oändligheten. Ändå är problemet exakt som för A, B och C.



A är x gånger större än B som är x gånger större än C. Jämför det med att D är x gånger större än E som är x gånger större än F. De relativa skillnaderna mellan kurvorna på väg mot noll är precis desamma som hos kurvorna på väg mot oändligheten.

D, E och F går mot oändligheten. Men i denna oändlighet är D oändligt mycket större än E som i sin tur är oändligt mycket större än F.

Om vi betraktar de olika kurvorna sedda från D, så inträffar det oväntade, att också E (= D/x) och F (= D/x^2) går mot gränsvärdet 0.

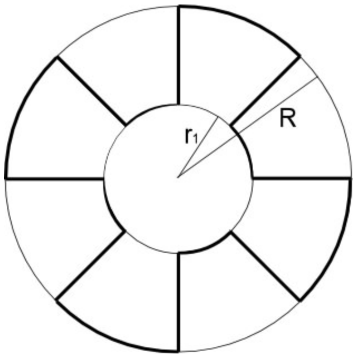
Månghörningen och cirkeln, del 1

Låt oss titta närmare på en liksidig månghörning med n stycken hörn, med samma vinkel i alla hörn och med alla hörnen riktade utåt från ett gemensamt centrum. n = 3 ger en liksidig triangel, n = 4 en kvadrat, n = 5 en liksidig femhörning. När jag låter antalet hörn växa mot oändligt många, påminner månghörningen allt mer en cirkel. Mycket riktigt är månghörningarnas gränsvärde en sådan. En naturlig fråga blir: *Har cirkeln oändligt många hörn eller inga hörn alls?*

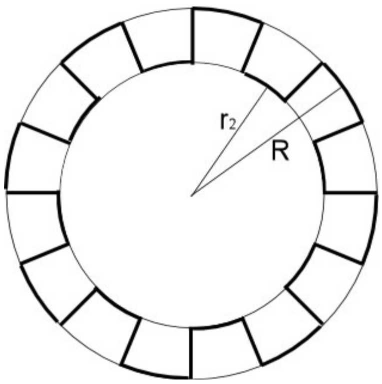
Antag, att cirkeln har hörn. Kalla tre sådana i rad för A, B och C. Hörnet B bestäms av de två linjerna AB och BC. Deras längd xx (0±) är oändligt kort utan att därför vara exakt 0. Om cirkeln har hörn, så är den alltså en månghörning med sidlängden xx. Cirkeln kan då förfinas till en månghörning med kortare sidlängd än xx (som betyder fler sidor totalt) och är därför inte gränsvärdet. Av denna motsägelse följer, att *cirkeln saknar hörn*.

Månghörningen och cirkeln, del 2

Jag utgår från två cirklar med gemensam medelpunkt. Den mindre har radien r och den större radien R. Mellan dem lägger jag in en kurva enligt figuren nedan.



Nu dubblar jag antalet kuggar och ökar samtidigt r till r_2, så att avståndet R - r_2 blir hälften av R - r_1.



Denna dubblering och halvering fortsätts sedan i all oändlighet.

Låt mig börja med värdena R = 20 cm och r = 10 cm. Då är summan av de radiella delarna av kuggarna 8 x (R - r) = 8 x (20 - 10) = 80 cm.

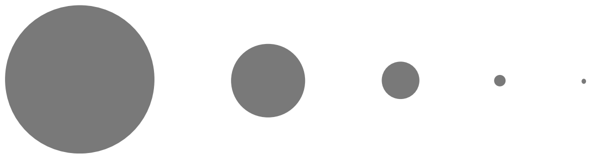
På den undre bilden är r = 15 cm, så R - r = 5 cm. Men nu har de radiella delarna ökat i antal till det dubbla mot i förra bilden, alltså från 8 till 16 stycken, så summan av dem är nu 16 x 5 = 80 cm, alltså samma som tidigare. Hur mycket jag än kramar ihop kugglinjen blir den nämnda radiella summan 80 cm.

r_n växer hela tiden mot R. I gränsvärdet ser den mellan cirklarna hopklämda figuren ut som en cirkel med radien R = 20 cm och dess yta och radie sammanfaller till synes med gränsvärdecirkelns vars omkrets är cirka 126 cm. Men"kugg-"cirkelns är ungefär 206 cm. Det skiljer därför 80 cm mellan dem! Kuggarna försvinner aldrig helt. Oändligt många och oändligt små kombineras i det här fallet till ett tillskott på 80 cm (∞± x 0± = 80). "Kugg"-egenskapen är en egenskap som saknas hos gränsvärdet cirkel.

Klotvolymen, cirkelytan och punkten

En cirkelyta är en rund skiva med en viss radie. Om jag krymper radien allt mer i ett oändligt antal steg ner mot 0, får jag ett gränsvärde som är en punkt, alltså cirkelns medelpunkt.

Punkten saknar radie, så den är ingen cirkelyta. Om punkten hade haft en radie, skulle det vara möjligt att krympa den en bit till och då hade punkten inte varit det sökta gränsvärdet.



Säg nu att vi har en klotvolym. Om vi låter radien gå mot 0 i ett oändligt antal steg, så är gränsvärdet återigen en punkt, den som vi kallar klotets medelpunkt. Den tredimensionella volymen har reducerats till en nolldimensionell punkt. Rymdradien är borta.

Genom att använda själva gränsvärdet, så avsäger vi oss i de här fallen tillgången till ett antal dimensioner, vilket kan vara nog så allvarligt.

Motsatta vägen

Kan vi från ett gränsvärde hitta tillbaka genom gränsvärdesprocessen?

Nej! Gränsvärden är ouppnåeliga och saknar kontakt med det som genererar dem. Alla funktioner/talföljder som har det givna gränsvärdet är likvärdiga kandidater och det kan röra sig om ändlöst många.

Alla geometriska objekt som kan degenereras till gränsvärdet punkt är ett annat exempel på mångfalden returvägar.

1 är inte samma som 0,9999999999999999999...

I början av kapitlet "Minst och störst" tog jag i samband med den ryska nollan upp det felaktiga påståendet, att 1 = 0,999... Nu kommenterar jag det utifrån gränsvärdesaspekten.

Talföljden T = 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, 0,99999, ... konvergerar monotont enligt $\lim_{n \to \infty}(1 - \frac{1}{10^n})$ mot (det ouppnåeliga) gränsvärdet 1.

Om 0,999... står för ett alternativt skrivsätt till limesuttrycket, är 0,999... *inte* samma som 1.

Men ...

Om 0,999... däremot betecknar ett decimaltal, där antalet decimaler redan från början är satt till oändligt många, blir resultatet ett annat. I decimaltal med oändligt många decimaler och cyklisk svans gäller, att vi aldrig kan ange antalet mer precist, än att det tillhör en viss storleksordning. Samtidigt är det mycket enkelt att få fram en given decimals värde. Om T = 0,999..., så:

> 9T = 10T - T = 9,999... - 0,999... = 9 - 0 = 9.
> T = 1
> 0,999... = 1.

Den här decimalelimineringen fungerar inte för irrationella tal, då deras decimaler saknar cyklisk svans och därför inte kan beräknas i godtycklig position långt bort.

Gränsvärden tar sig fram via stegning längs ett index, vanligen naturliga tal. Dessa kan, trots att de är ändlöst många, aldrig nå upp till att bli oändligt många. Däri ligger skillnaden ovan. Se även kapitlet ”Min oändlighet” som förklarar skillnaden mellan ändlöshet och oändlighet närmare.

I fallet 1 ≠ 0,999... använder vi ändlighetsmatematik (gränsvärde), men för att nå resultatet 1 = 0,999... tillämpar vi oändlighetsmatematik (decimalförskjutning). Vi använder alltså två olika typer av matematik för att besvara frågan: Är 0,999... = 1?

Lite lekfullt om 0,999…:

> Bråket n/9 ger uträknat, för 0 ≤ n < 9 kvoten *0,nnn…* Exempelvis är 7/9 = 0,777… Men försök hitta ett bråk som ger kvoten 0,999…!
>
> En lösning ges sist i kapitlet ”Avslutning”.